Početní část 2 - 1.2.2021

3. Pro $x > 0$ počítáme integrál

$$I = \int \frac{1}{\sinh(x) + 2\cosh(x)}\, dx = \int \frac{1}{\frac{e^x - e^{-x}}{2} + 2\frac{e^x + e^{-x}}{2}}\, dx$$
$$= 2\int \frac{e^x}{e^{2x} - 1 + 2e^{2x} + 2}\, dx = 2\int \frac{e^x}{3e^{2x} + 1}\, dx$$

Po substituci $t = e^x$, $dt = e^x\, dx$ dostáváme

$$I = 2\int \frac{1}{3t^2 + 1}\, dt = 2\int \frac{1}{(\sqrt{3}t)^2 + 1}\, dt \overset{c}{=} \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}(\sqrt{3}t) = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}(\sqrt{3}e^x) = F(x).$$

Protože původní integrand

$$f(x) := \frac{1}{\sinh(|x|) + 2\cosh(x)}$$

je sudá funkce, bude platit, že $G(x) = -F(-x)$, $x < 0$, je primitivní funkce k f na $(-\infty, 0)$.

Protože f je spojitá na $\mathbb{R}$ očekáváme existenci primitivní funkce na $\mathbb{R}$, tu získáme lepením. Máme

$$\lim_{x \to 0-} G(x) = -\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}(\sqrt{3}) = -\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

a

$$\lim_{x \to 0+} F(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}(\sqrt{3}) = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Celkem tedy dostáváme

$$\int \frac{1}{\sinh(|x|) + 2\cosh(x)}\, dx \overset{c}{=} H(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

kde

$$H(x) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}(\sqrt{3}e^x) - \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}, & x > 0, \\ -\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}(\sqrt{3}e^{-x}) + \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}, & x < 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Pokud bychom nevyužili argument se sudostí, budeme pro $x < 0$ počítat integrál

$$J = \int \frac{1}{\sinh(-x) + 2\cosh(x)}\, dx = \int \frac{1}{\frac{e^{-x} - e^{x}}{2} + 2\frac{e^x + e^{-x}}{2}}\, dx$$
$$= 2\int \frac{e^x}{1 - e^{2x} + 2e^{2x} + 2}\, dx = 2\int \frac{e^x}{e^{2x} + 3}\, dx$$

Po substituci $t = e^x$, $dt = e^x\, dx$ zde dostáváme

$$J = 2\int \frac{1}{t^2+3}\, dt = \frac{2}{3}\int \frac{1}{(\frac{t}{\sqrt{3}})^2+1}\, dt \overset{c}{=} \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}(\tfrac{t}{\sqrt{3}}) = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}(\tfrac{e^x}{\sqrt{3}}).$$

Po lepení pak dostaneme

$$\int \frac{1}{\sinh(|x|) + 2\cosh(x)}\, dx \overset{c}{=} \widetilde{H}(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

kde

$$\widetilde{H}(x) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}(\sqrt{3}e^x) - \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}, & x > 0, \\ \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}(\frac{e^x}{\sqrt{3}}) - \frac{\pi}{3\sqrt{3}}, & x < 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

4. Protože

$$\Big(\cos(\sinh(x^4))\Big)^{\dfrac{1}{\log\left(1+\frac{\sin(x^{12})}{x^4}\right)}} = e^{\dfrac{\log(\cos(\sinh(x^4)))}{\log\left(1+\frac{\sin(x^{12})}{x^4}\right)}},$$

budeme nejdříve počítat limitu

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x\to 0} \frac{\log(\cos(\sinh(x^4)))}{\log\left(1+\frac{\sin(x^{12})}{x^4}\right)} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+(\cos(\sinh(x^4))-1))}{\cos(\sinh(x^4))-1} \cdot \frac{\frac{\sin(x^{12})}{x^4}}{\log\left(1+\frac{\sin(x^{12})}{x^4}\right)} \cdot \frac{\cos(\sinh(x^4))-1}{\frac{\sin(x^{12})}{x^4}} \\ &= L_1 \cdot L_2 \cdot L_3 \cdot L_4, \end{aligned}$$

kde (použili jsme aritmetiku limit, korektnost ověříme až všechny limity spočítáme)

$$\begin{aligned} L_1 &= \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+(\cos(\sinh(x^4)))-1)}{\cos(\sinh(x^4))-1}, \\ L_2 &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin(x^{12})}{x^4}}{\log\left(1+\frac{\sin(x^{12})}{x^4}\right)}, \\ L_3 &= \lim_{x\to 0} \frac{\cos(\sinh(x^4))-1}{\sinh^2(x^4)}, \\ L_4 &= \lim_{x\to 0} \frac{x^4\cdot\sinh^2(x^4)}{\sin(x^{12})}. \end{aligned}$$

Pomocí známých limit $\lim_{x\to 0} \dfrac{\log(1+x)}{x} = 1$ a $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$ (a věty o limitě složené funkce, podmínky (P)) dostáváme

$$L_1 = L_2 = 1, \quad L_3 = -\frac{1}{2}.$$

Nakonec ještě pomocí limit $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ a $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sinh x}{x} = 1$ (kterou můžeme spočítat např. l'Hospitalovým pravidlem), a věty o limitě složené funkce, podmínky (P), dostaneme

$$L_4 = \lim_{x\to 0} \frac{x^4\cdot\sinh^2(x^4)}{\sin(x^{12})} = \lim_{x\to 0} \frac{\sinh(x^4)}{x^4} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sinh(x^4)}{x^4} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{x^{12}}{\sin(x^{12})} = 1.$$

Celkově tedy $L = -\frac{1}{2}$ a (podle věty o limitě složené funkce, podmínky (S)) dostáváme

$$\Big(\cos(\sinh(x^4))\Big)^{\dfrac{1}{\log\left(1+\frac{\sin(x^{12})}{x^4}\right)}} = e^L = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$